



## T.D. de Microéconomie 1 (Série n°1)

Equipe pédagogique : Hemmi, Dyane, Mounaïm, Nejari et Taoudi

### I- Approche cardinale de l'utilité

#### Exercice n°1

Un consommateur rationnel dispose d'un revenu de 10 dh, il cherche à répartir ce revenu entre deux biens X et Y en vue de maximiser sa satisfaction. Les prix des biens sont  $P_x = 1$  dh et  $P_y = 3$  dh. Les utilités totales de ces biens évoluent en fonction des quantités consommées comme indiqué sur le tableau :

Quantités des biens X et Y	1	2	3	4	5	6
Utilité totale de bien X	10	19	27	34	40	44
Utilité totale de bien Y	24	45	63	78	87	90

1. Définir l'utilité marginale et préciser sa signification économique et mathématique.
2. Comment évoluent les utilités marginales des biens lorsque les quantités passent de 1 à 6 ? Quelle explication peut-on avancer à propos de cette évolution ?
3. Dans quelle mesure la croissance de l'utilité totale vérifie-t-elle l'hypothèse de non-saturation des besoins ?
4. Définir et calculer l'utilité marginale pondérée.
5. Calculer l'utilité totale correspondant à l'utilisation optimale du revenu de ce consommateur.
6. Que pensez-vous des hypothèses de la cardinalité et de l'additivité des utilités ?

#### Exercice n°2

Soit un consommateur rationnel qui dispose d'un revenu de 12 dh. Son objectif est de répartir ce revenu entre deux biens X et Y en vue de maximiser sa satisfaction. Les prix des biens sont  $P_x = 2$  dh et  $P_y = 4$  dh. Les utilités marginales ( $U_m$ ) de ces biens évoluent en fonction des quantités comme indiqué sur le tableau :

Quantités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U_m$ de bien X	120	100	90	70	50	25	10	0	-10	-20
$U_m$ de bien Y	240	200	180	140	100	50	20	0	-20	-40

1. En quoi consiste la 1<sup>ère</sup> loi de Gossen ? Est-elle vérifiée dans le tableau ci-dessus ?
2. Déterminer la combinaison optimale des biens X et Y et l'utilité totale maximale (du revenu dépensé).
3. Quelle deviendra la combinaison optimale si le revenu passe à 24 dh ?
4. Comparer les questions 2 et 3 suite à l'augmentation du revenu.



## II- Approche ordinale de l'utilité

### Exercice n°3

Un consommateur possède la fonction d'utilité suivante :  $U = f(x,y) = 2xy + 3y$

x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y.

Le revenu de ce consommateur est  $R=150$  dh, les prix des biens X et Y sont respectivement  $P_x=12$  dh et  $P_y=21$  dh.

1. Donner l'expression du TMS de x à y.
2. Calculer l'équation de la droite du budget.
3. Déterminer les quantités des biens X et Y qui correspondent à l'utilisation optimale du revenu de ce consommateur.
4. Supposons que ce consommateur souhaite réaliser un niveau d'utilité  $U=70$ , quel est le revenu minimum qui lui est nécessaire ?
5. Calculer le  $TMS_{x/y}$  au point d'équilibre obtenu dans la question 3, quelle est sa signification ?
6. Représenter graphiquement les deux optimums du consommateur précédemment trouvés.

### Exercice n°4

La fonction d'utilité d'un consommateur rationnel est de la forme suivante :

$$U = f(x,y) = 2x^2y$$

x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y.

1. Sachant que le revenu du consommateur est de 150 dh et que les prix des biens X et Y sont respectivement  $P_x = 10$  dh et  $P_y = 20$  dh, déterminer la combinaison optimale des biens X et Y ainsi que l'indice d'utilité correspondant.
2. Supposons que le prix du bien X augmente et s'établit à  $P_x = 15$  dh, alors que le prix du bien Y et le revenu restent constants, calculer l'effet de l'augmentation de  $P_x$  sur la consommation des biens X et Y en distinguant l'effet de substitution et l'effet de revenu.
3. Si le prix du bien X devient variable ( $R$  et  $P_y$  restant constants) déterminer, et ce après avoir défini la courbe de consommation-prix, l'équation de la demande du bien X en fonction de son prix. S'agit-il d'une demande optimale ? Calculer l'élasticité prix de cette demande.
4. Supposons maintenant que le revenu devient variable et que les prix des biens X et Y sont constants, déterminer, et ce après avoir défini la courbe de consommation-revenu, l'équation de la courbe d'Engel pour le bien X. S'agit-il d'une demande optimale ? Quelle est son élasticité-revenu ?
5. Préciser le statut économique du bien X : est-il un bien normal ou un bien inférieur ?

### Exercice n°5

Les préférences d'un consommateur, pour deux biens X et Y, sont représentées par la fonction d'utilité  $U = f(x,y) = x_i(y + 1)$  ; où x et y représentent les quantités consommées des biens X et Y, U étant l'indice d'utilité. Les prix des biens sont  $P_x = 5$  dh et  $P_y = 10$  dh. Le revenu du consommateur est  $R = 190$  dh.

Expliquez le passage de la fonction d'utilité à la fonction de demande. Illustrez votre démarche en déterminant, pour le bien X, la fonction de demande en fonction du revenu et du prix  $P_x$ .



## Corrigé de la série 1

### Exercice 1

www.fsjes-agadir.info

#### 1. Définitions et interprétation de l'utilité marginale

**Définition :** L'Um mesure la variation de l'UT provoquée par la variation unitaire de la quantité consommée.

Extrêmement parlant, l'Um traduit la satisfaction procurée par une petite dose de bien pour passer d'une petite dose à une autre.

Mathématiquement, l'Um est représentée par la dérivée partielle de l'UT.

• Si le bien est non divisible :  $Um = \frac{\Delta UT}{\Delta q} = \frac{UT_n - UT_{n-1}}{q_n - q_{n-1}}$  : fonction discrète.

• Si le bien est divisible :  $Um = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta UT}{\Delta q} = \frac{dUT}{dq}$  : fonction continue.

L'Um est une fonction décroissante de la quantité consommée. En effet, la mesure d'un bien est associée par intervalles décroissants (on voit la loi de Gossen).

#### 2. Evaluation des Um des biens

Quantité des biens	1	2	3	4	5	6
Utilité marginale de X	16	9	8	7	6	4
Utilité marginale de Y	20	15	10	8	6	4
Um pondérée de X : $\frac{Um}{P}$	10	6	4	2	6	6
Um pondérée de Y : $\frac{Um}{P}$	4	2	4	4	2	1

Les utilités marginales des biens X et Y sont décroissantes conformément à la première loi de Gossen qui stipule que : "l'ensemble des utilités qui se présente sous une même forme de nature, produite de la même façon et consommée en une fois".

#### 3. Hypothèses de base concernant la consommation

La consommation est soumise à deux lois fondamentales. La loi de l'utilité marginale décroissante est égale à celle de la loi de l'utilité marginale croissante. Les utilités marginales des biens X et Y sont décroissantes conformément à la première loi de Gossen.

#### 4. Consommation et utilité de l'utilité marginale croissante

L'utilité marginale est la mesure de la satisfaction que procure un bien. Elle est représentée par la dérivée partielle de l'utilité marginale croissante.



Calcul de l'Um pondérée : voir tableau supra.

5. Combinaison optimale et calcul de l'utilité totale

La règle qui détermine l'équilibre du consommateur est l'égalisation des utilités marginales pondérées des biens. (deuxième loi de Gossen).

$$\frac{Um_x}{P_x} = \frac{Um_y}{P_y} / x.P_x + y.P_y = R = 10 \text{ dh}$$

La combinaison optimale est  $(x=4 ; y=2)$ .

La dépense correspondante est  $1.4 + 3.2 = 10 \text{ dh}$ .

L'utilité totale est  $UT = UT_x + UT_y = 34 + 45 = 79$ .

6. Cardinalité et additivité des utilités

La cardinalité : c'est une hypothèse qui signifie que l'utilité est mesurable par des nombres cardinaux (qui expriment la quantité et non l'ordre). Cependant l'utilité est un phénomène qualitatif, subjectif et psychologique. Elle est donc difficile à quantifier. La cardinalité demeure néanmoins une hypothèse commode pour distinguer l'utilité marginale de l'utilité totale.

L'additivité : C'est une hypothèse selon laquelle l'utilité d'un couple de biens est obtenue par l'addition des utilités des deux biens. C'est une hypothèse réaliste car elle implique que les biens sont indépendants. Or, souvent les biens sont interdépendants et sont consommés de façon associée. Si certains biens sont consommés séparément, ils n'auraient aucune utilité.

## Exercice 2

1. Loi de Gossen et évolution des utilités marginales des biens :

Quantités de biens	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Utilité marginale de X	120	100	90	70	50	25	10	0	-10	-20
Utilité marginale de Y	240	200	180	140	100	50	20	0	-20	-40
Quantités de biens	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Um pondérée de X : $\frac{Um_x}{P_x}$	60	50	<u>45</u>	35	<u>25</u>	12.5	5	0	-5	-10
Um pondérée de Y : $\frac{Um_y}{P_y}$	60	50	<u>45</u>	35	<u>25</u>	12.5	5	0	-5	-10

D'après la 1<sup>re</sup> loi de Gossen, l'Um d'un bien est sans cesse décroissante. En effet, le psychologue allemand a constaté que: "l'intensité d'un plaisir qui se prolonge finit par s'éteindre au point de satiété, au-delà de ce point le plaisir se transforme en peine". Dans notre cas les Um des biens X et Y sont décroissantes, s'annulant au point de satiété ( $x=7$  et  $y=7$ ) et sont par la suite négatives pour les quantités de X et Y égales à 8 et 9.



### Solution

Fonction d'utilité :  $U = f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y + 3y$

Fonction de contrainte :  $R = xP_x + yP_y = 12x + 21y$

#### 1/ Expression du TMS à $\bar{x}$

Le TMS peut se calculer de deux façons :

→ Expression algébrique du TMS à  $\bar{x}$  :  $TMS_{x/y} = -\frac{dy}{dx}$   
où  $y = f(x)$  est l'expression de la courbe d'indifférence.

Soit  $U_0$  une courbe d'indifférence.  $U_0 = 2xy + 3y = y(2x + 3)$

d'où  $y = \frac{U_0}{2x+3} = f(x)$ .

$$TMS_{x/y} = -\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{U_0}{2x+3}\right)' = \frac{-2U_0}{(2x+3)^2} = \frac{-2(y(2x+3))}{(2x+3)^2} = \frac{-2y}{2x+3}$$

→ Expression économique du TMS à  $\bar{x}$  :  $TMS_{x/y} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = -\frac{dy}{dx}$

$$TMS_{x/y} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{2y}{2x+3}$$

#### 2/ Equation de la droite du budget

$$R = xP_x + yP_y \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{P_x}{P_y} \cdot x + \frac{R}{P_y}$$

$$150 = 12x + 21y \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{12}{21} \cdot x + \frac{150}{21} = -\frac{4}{7} \cdot x + \frac{50}{7}$$

#### 3/ Utilisation optimale du revenu

Le problème du consommateur s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \max U = 2xy + 3y \\ \text{Sous contrainte } 150 = 12x + 21y \end{cases}$$

Il existe différentes méthodes permettant de résoudre ce type de problème,

à savoir :

- Méthode de substitution
- Méthode du multiplicateur de Lagrange
- Méthode du TMS à l'équilibre.



Méthode de substitution

$$\begin{cases} \max U = 2xy + 3y \\ \text{sous } 150 = 12x + 21y \end{cases}$$

Equation de la droite du budget:  $y = \frac{-12}{21}x + \frac{150}{21} = \frac{-4}{7}x + \frac{50}{7}$

On remplace  $y$  par la valeur dans la fct d'utilité pour transformer celle-ci en une fonction à une seule variable.

$$U = f(x, y) = 2xy + 3y = 2x\left(\frac{-4}{7}x + \frac{50}{7}\right) + 3\left(\frac{-4}{7}x + \frac{50}{7}\right)$$

$$U = \frac{-24x^2}{21} + \frac{300x}{21} - \frac{36x}{21} + \frac{450}{21} = \frac{-8x^2}{7} + \frac{100x}{7} - \frac{12x}{7} + \frac{150}{7}$$

$$U = \frac{1}{21}(-24x^2 + 264x + 450) = f(x) = \frac{1}{21}(-8x^2 + 88x + 150)$$

$U = f(x)$  est maximale si  $U' = 0$  et  $U'' < 0$   $U' = -16x + 88 = 0$

→ Condition de premier ordre:  $U' = f'(x) = 0$

$$U' = \frac{1}{21}(-48x + 264) = 0 \Rightarrow x = \frac{264}{48} = \boxed{5,5}$$

Si  $x = 5,5$  alors  $y = \frac{-12}{21}(5,5) + \frac{150}{21} = -3,14 + 7,14 = \boxed{4} = \textcircled{4}$

→ Condition de second ordre:  $U'' < 0$

$$U'' = \frac{-48}{21} < 0 \quad U'' = \frac{-16}{7} < 0$$

Donc Pour des valeurs:  $x_0 = 5,5$  et  $y_0 = 4$   $U$  est maximale.

$$U = 2xy + 3y = 2(5,5)(4) + 3(4) = \boxed{56}$$

$P_x = 12$	$P_y = 21$	$R = 150$
$x = 5,5$	$y = 4$	$U = 56$



### Méthode du multiplicateur de Lagrange

$$\begin{cases} \text{Max } U = 2xy + 3y \\ \text{Sous } 150 = 12x + 4y \end{cases}$$

La fonction de Lagrange  $L$  est de la forme suivante :

$L =$  fonction objectif  $+ \lambda$  (équation contrainte multipliée)

$$L = 2xy + 3y + \lambda (150 - 12x - 4y) = L(x, y, \lambda)$$

$L$  est maximale si deux conditions sont remplies :

#### Condition de 1<sup>er</sup> ordre

$$L'_x = \frac{\partial L}{\partial x} = (2y - 12\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{12} \quad (1)$$

$$L'_y = \frac{\partial L}{\partial y} = (2x + 3 - 4\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2x+3}{4} \quad (2)$$

$$L'_\lambda = 150 - 12x - 4y = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{12} = \frac{2x+3}{4} \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{2x+3}{4}$$

$$\Rightarrow 4y = 6(2x+3)$$

$$4y = 12x + 18 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{4x+6}{4}}$$

Dans (3) je remplace  $y$  par  $\frac{4x+6}{4}$

$$150 = 12x + 4\left(\frac{4x+6}{4}\right) = 12x + 4x + 6$$

$$150 = 16x + 6$$

$$144 = 16x \Rightarrow x = \frac{144}{16} = \boxed{9}$$

$$\text{Pour } x=9, y = \frac{4(9)+6}{4} = \frac{42}{4} = \boxed{10.5}$$

#### Condition de 2<sup>nd</sup> ordre

$$\begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0$$

Ce déterminant doit être inférieur à 0 s'il s'agit de minimiser



après avoir déjà :

$$L'_x = 2y - 2\lambda; \text{ d'où } L''_{xx} = 0, L''_{xy} = 2 \text{ et } L''_{x\lambda} = -12$$

$$L'_y = 2x + 3 - 2\lambda; \text{ d'où } L''_{yx} = 2, L''_{yy} = 0 \text{ et } L''_{y\lambda} = -21$$

$$L'_\lambda = 110 - 12x - 21y; \text{ d'où } L''_{\lambda x} = -12, L''_{\lambda y} = -21 \text{ et } L''_{\lambda\lambda} = 0$$

ainsi on construit le det.

$$\det = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 2 & 0 & -21 \\ -12 & -21 & 0 \end{vmatrix}$$

Méthode de calcul de déterminant

1<sup>re</sup> - Si une seule ligne (ou colonne) se détermine, alors  $\det = 0$

exemple :

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2<sup>de</sup> - Si une ligne (ou colonne) ne contient que des zéros, alors  $\det = 0$

exemple :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 0 & 2 & -21 \\ 0 & -12 & -21 \end{vmatrix} = 0$$

3<sup>de</sup> - Méthode de SARRUS

$\det = [\text{Somme des produits des diagonales principales}]$

$[\text{Somme des produits des diagonales secondaires}]$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -12 & | & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -21 & | & 2 & 0 \\ -12 & -21 & 0 & | & -12 & -21 \end{vmatrix} = [(0 \cdot 0 \cdot 0) + (2 \cdot -21 \cdot -12) + (-12 \cdot 2 \cdot -21)] - [(2 \cdot 0 \cdot -12) + (-21 \cdot -12 \cdot 0) + (0 \cdot 2 \cdot 21)]$$

$$= [504 + 504] - [0] = 1008 > 0$$

Par conséquent  $(x=3, y=4)$  est la combinaison optimale et  $U=56$



20) - Problème de minimisation avec contraintes

Le problème à résoudre est une minimisation d'une fonction de la forme suivante

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 12$$

$$x \text{ sous } 2x + 4y = 18$$

- Méthode des Lagrange à 2 variables

$$\text{à 2 variables, } \text{Lagrangien} = \frac{L(x,y)}{L(x,y)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{L(x,y)} = \frac{2x^2}{2x+4} = \frac{2x}{2} = \frac{12}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{2x}{2x+4} = \frac{12}{2} \quad \left. \begin{array}{l} 2x+4y=18 \\ 2x+4y=6 \end{array} \right\}$$

$$\text{On en déduit} : 2x+4y = 2x+4 = 18$$

$$2x+4y = 2x+4 = 18 \quad \text{soit } y = \frac{18x+4}{-2} = \frac{4x+6}{-2}$$

On remplace  $y$  par  $\frac{4x+6}{-2}$  dans la fonction à minimiser

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 12 = 2\left(\frac{4x+6}{-2}\right) = \frac{2}{-2}(8x^2 + 12x + 12x + 18)$$

$$(2x+4) = 8x^2 + 4x + 18$$

$$4x+6 = 8x^2 + 4x + 18$$

$$4x+6 = 8x^2 + 4x + 18$$

$$\text{soit } 8x^2 + 4x + 18 = 0$$

$$\text{on trouve } x^2 + 3x + 9 = 0$$

$$b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} = (3)^2 - 4(-9) = 245 \quad \text{et } \sqrt{b} = 15,65$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 15,65}{2} = 6,32 \quad \text{et } x_2 = \frac{-3 - 15,65}{2} < 0 \text{ à rejeter}$$

$$\text{Si } x = 6,32 \text{ alors } y = \frac{4(6,32) + 6}{-2} = 4,46$$

$$\text{Revenu maximum} = R = 12(6,32) + 24(4,46) = 169,5$$

$$L = 2(6,32)(4,46) + 3(4,46)$$

$$= 46,58 + 13,38 = 60,96 = 70$$



### 5) - valeur du TMS<sub>x/y</sub> au point d'équilibre

A l'équilibre question 3 :  $x=5,5$ ,  $y=4$  et  $u=56$

$$TMS_{x/y} = \frac{-2.40}{(2x+3)^2} = \frac{-2.56}{(2(5,5)+3)^2} = \frac{-112}{196} = \boxed{0,57}$$

ou bien

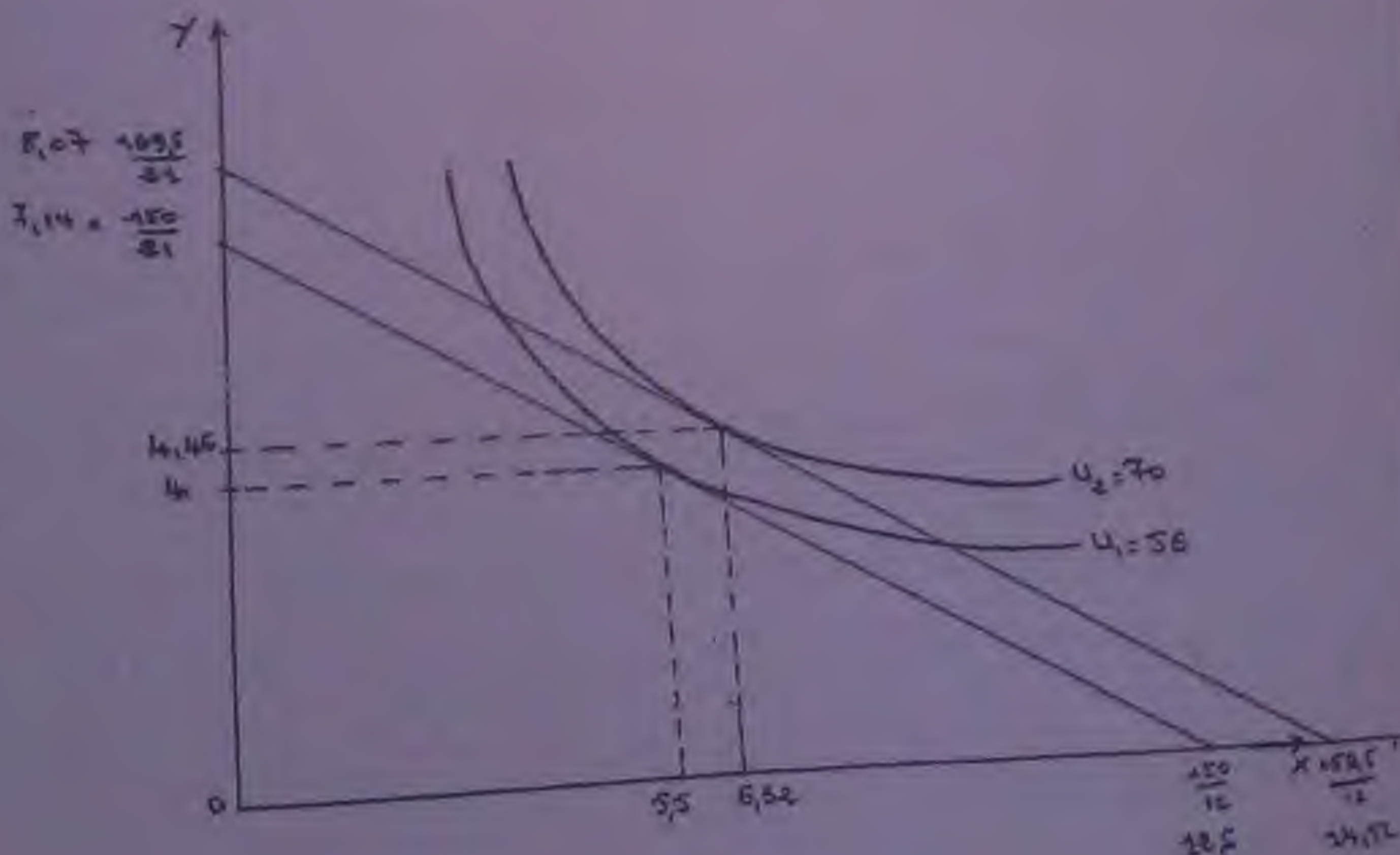
$$TMS_{x/y} = \frac{-24}{2x+3} = \frac{-2.4}{2(5,5)+3} = -0,57 \quad |TMS_{x/y}| = 0,57$$

$$TMS_{x/y} = \frac{u_{mx}}{u_{my}} = \frac{24}{2x+3} = \frac{2.4}{2(5,5)+3} = \frac{8}{14} = \boxed{0,57} = \frac{2}{2.4} = \frac{2}{2.2}$$

### Signification :

Au point d'équilibre, le consommateur est prêt à céder 0,57 unités du bien y pour une unité supplémentaire du bien x tout en conservant le même niveau de satisfaction.

### 6) - Représentations graphiques





Fonction d'utilité:  $U(x, y) = 2x^2y$

1° - Combinaison optimale : Situation initiale

Méthode de Lagrange :  $L = 2x^2y + \lambda(150 - 10x - 20y)$

$$L'_x = 4xy - 10\lambda = 0 \Rightarrow 4xy = 10\lambda \quad (1)$$

$$L'_y = 2x^2 - 20\lambda = 0 \Rightarrow 2x^2 = 20\lambda \quad (2)$$

$$L'_\lambda = 150 - 10x - 20y = 0 \quad (3)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow \frac{4xy}{2x^2} = \frac{10\lambda}{20\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 4y}$$

$$(3) : 150 = 10x + 20y = 10(4y) + 20y$$

$$= 10(4y) + 20y = 60y$$

$$\Rightarrow y = \frac{150}{60} = \boxed{2,5} \text{ et } x = 4 \cdot 2,5 = \boxed{10}$$

Indice d'utilité :

$$U_1 = 2(10)^2(2,5) = \boxed{500}$$

$P_x = 10$	$R = 150$	$x_1 = 10$
$P_y = 20$	$U_1 = 500$	$y_1 = 2,5$

2° - Nouvelle Combinaison optimale : Situation finale

Situation finale S2 :  $P_x = 15$

Maximiser  $U = 2x^2y$

Sachant que  $150 = 15x + 20y$

A l'optimum :  $\frac{P_{max}}{P_y} = \frac{20}{15} \Rightarrow \frac{4xy}{2x^2} = \frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{15}{20}$

on en déduit :  $y = \frac{15 \cdot x}{40}$

$$150 = 15x + 20\left(\frac{15}{40}x\right) = 15x + 7,5x = 22,5x$$

$$x = \frac{150}{22,5} = \boxed{6,66} \text{ et } y = \frac{15}{40} \cdot 6,66 = 2,4975 = \boxed{2,5}$$



1/3

Nouvel indice d'utilité:  $U_2 = 2 \cdot (6,66)^2 \cdot (2,50) = 221,78$

$P_x = 15$	$U_2 = 221,78$	$x_2 = 6,66$
$P_y = 20$	$R_2 = 150$	$y_2 = 2,50$

→ Situation intermédiaire  $S_0$

Minimiser  $R = 15x + 20y$  |  $U_0: U_1 = 500 = 2x^2 \cdot y$

A l'optimum:  $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow y = \frac{15}{40} \cdot x$

$500 = 2x^2 y = 2x^2 \cdot \frac{15}{40} x = \frac{15}{20} x^3$

$10000 = 15x^3 \Rightarrow x^3 = 666,6$  soit  $x = 8,74$

$y = \frac{15}{40} (8,74) = 3,28$

$R_0 \text{ minimum} = 15(8,74) + 20(3,28) = 196,7$

$P_x = 15$	$U_0 = 500$	$x_0 = 8,74$
$P_y = 20$	$R_0 = 196,7$	$y_0 = 3,28$

→ Décomposition de l'effet-prix en ES et ER

$\Delta x$ et $\Delta y$	ES: $S_1 \rightarrow S_0$	ER: $S_0 \rightarrow S_2$	ET: $S_1 \rightarrow S_2$
$\Delta x$	$x_0 - x_1$ $8,74 - 10 = -1,26$	$x_2 - x_0$ $6,66 - 8,74 = -2,08$	$x_2 - x_1$ $6,66 - 10 = -3,34$
$\Delta y$	$y_0 - y_1$ $3,28 - 2,5 = +0,78$	$y_2 - y_0$ $2,5 - 3,28 = -0,78$	$y_2 - y_1$ $2,5 - 2,5 = 0$

3° Signes des ES et ER et nature des biens.

→  $ES_x = \Delta x = -1,26 < 0$ :  $Q_x$  a diminué car  $P_x$  a augmenté.

→  $ER_x = \Delta x = -2,08 < 0$ :  $Q_x$  a diminué car  $R_{\text{réel}}$  a diminué.

$Q_x$  varie dans le même sens que  $R$  et dans le même sens que le revenu; donc  $x$  est un bien normal.

→  $ES_y = \Delta y = +0,78 > 0$ :  $Q_y$  a augmenté car  $y$  est devenu relativement moins cher.

→  $ER_y = \Delta y = -0,78 < 0$ :  $Q_y$  a diminué car  $R_{\text{réel}}$  a diminué.



### 3° Variation du prix du bien x:

→ Courbe de consommation prix: C'est un ligne qui relie les points d'équilibre successifs, suite à la variation du prix d'un bien, le prix de l'autre bien et le revenu nominal sont constants.

→ Equation de la demande du bien x:

Elle puise ses origines des conditions de maximisation de l'utilité

$$\text{Max } U = 2x^2y \quad | \quad 150 = x.P_x + 20y$$

$$L = 2x^2y + \lambda (150 - x.P_x - 20y)$$

$$L'_x = 4xy - \lambda.P_x = 0 \quad (1)$$

$$L'_y = 2x^2 - 20 = 0 \quad (2)$$

$$L'_\lambda = 150 - x.P_x - 20y = 0 \quad (3)$$

$$(1)/(2): \frac{2y}{x} = \frac{P_x}{20} \Rightarrow x.P_x = 40.y \Rightarrow \boxed{y = \frac{x.P_x}{40}}$$

$$(3): 150 = x.P_x + 20\left(\frac{x.P_x}{40}\right) = x.P_x + \frac{x.P_x}{2} = \frac{3x.P_x}{2}$$

$$3.x.P_x = 300 \Rightarrow x.P_x = 100 \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{P_x}(P_x) = 100.P_x^{-1}}$$

→ Optimalité de la fonction de demande:

Déduite algébriquement des conditions de maximisation de l'utilité et graphiquement de la Courbe de C.P. prix liés des optima successifs. Cette fct. de demande est forcément rationnelle. Elle exprime donc des quantités optimales.

Exple:  $P_x = 10 \quad x = \frac{100}{10} = 10$  (voir question 1).

→ Elasticité - prix de la demande:

Etant une fonction puissance, cette demande est une demande iso. élastique. Son élasticité est toujours d'équation à son exposant.

$$\text{vérification: } \epsilon_{x/P_x} = \frac{\partial x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{x} = -\frac{100}{P_x^2} \cdot \frac{P_x}{100} = -\frac{100}{P_x^2} \cdot \frac{P_x^2}{100} = \boxed{-1}$$



1. Equation d'engel pour le bien x

a. Définition de la Courbe de C. Révenu

C'est une ligne qui relie les points d'équilibre successifs, suite à la variation du Revenu. Le prix des biens restant constant.

b. Equation d'Engel pour le bien x

Ena la dérivée de la condition de maximisation de l'utilité,

$$\begin{cases} \text{max } U = 3x + y + 2xy & / R = 10x + 20y \\ \text{avec } x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Il s'agit de  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} \Rightarrow \frac{3 + 2y}{1} = \frac{10}{1} \Rightarrow \frac{2y}{1} = \frac{10}{1} \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 2y$  soit  $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{2}{1}}$

$R = 10x + 20y = 10\left(\frac{2y}{1}\right) + 20y = 20y + 20y = 40y$

$\boxed{x = 2y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{1}$

c. Optimalité de la fonction d'Engel

Cette fonction est optimale car elle est dérivée algébriquement de la condition de maximisation de l'utilité, et graphiquement de la CCR. Les conditions optimales sont du type :

Ena exprime donc les conditions optimales.

exple :  $\frac{x}{y} = \frac{150}{15} = 10$  (voir question 1)

d. Equation d'Engel pour le bien x

Expr =  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{3 + 2y}{1} = \frac{10}{1} \Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$



### 59- Statut du bien x

$e_{x/P_x} = -1$  : la quantité demandée du bien x varie dans le sens inverse du prix  $P_x$ .

$e_{x/P} = 1$  : la quantité demandée du bien x varie dans le même sens que le revenu.

Le bien x est un bien normal.



## Exercice 5

Fonction d'utilité:  $U = f(x, y) = x(y + 1)$  ;  $R = 190 = 5x + 10y$

### 1. Passage de la fonction d'utilité à la fonction de demande

La fonction de demande d'un bien  $x$  s'exprime soit en fonction du revenu ( $x = f(R)$  : fonction d'Engel), soit en fonction du prix du bien ( $x = f(P_x)$  : fonction de demande).

Deduction de la fonction d'Engel :

La fonction d'Engel pour un bien se déduit algébriquement des conditions de maximisation de la fonction d'utilité. Géométriquement, la courbe d'Engel se dérive de la courbe de consommation-revenu, lieu des points représentatifs des optima du consommateur.

La deduction de la fonction d'Engel se fait sous l'hypothèse de la variation du revenu à prix des biens constants (hypothèse ceteris paribus).

Deduction de la fonction de demande :

La fonction de demande d'un bien se déduit algébriquement des conditions de maximisation de la fonction d'utilité. Géométriquement la courbe de demande se dérive de la courbe de consommation-prix, lieu des points représentatifs des optima du consommateur.

La deduction de la fonction de demande se fait sous l'hypothèse de la variation du prix du bien  $x$  revenu et prix de l'autre bien constants. (hypothèse toutes choses égale par ailleurs).

### 2. Illustration de la démarche

Il faut alors illustrer la démarche décrite en haut en calculant pour le bien  $x$  la fonction d'Engel et la fonction de demande.

#### 2.1. Variation du revenu et fonction d'Engel (bien X)

Les fonctions d'Engel se déduisent des conditions d'optimisation de l'utilité pour  $R$  quelconque.

$$\begin{cases} \text{Maximiser } U = f(x, y) = x(y + 1) \\ \text{sous la contrainte } R = 5x + 10y \end{cases}$$

à l'équation:  $TMO_x = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{P_x}{P_y}$

$$\frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{y+1}{x} = \frac{P_x}{P_y} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow y+1 = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 1$$

#### a. Fonction d'Engel pour le bien X

$$R = 5x + 10y \text{ et } y = \frac{x}{2} - 1$$

$$R = 5x + 10\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 10x - 10$$

$$R + 10 = 10x \text{ soit } x = f(R) = \frac{R + 10}{10}$$



$$u(x, y, z) = u(y, z) = \log(x)$$

$$P = 100 + 50x + 20y$$

variation de  $u$  et de  $f$  par rapport à  $x$

$$\begin{cases} \text{Hess } u = \log(x) \\ \text{et } P = 100 + 50x + 20y \end{cases}$$

$$\Delta f_{\text{optimal}} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$100 + 50x + 20y = 100 + 50x + 20y$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} = 0.5}$$

$$P = 100 + 50x + 20y = 100 + 50 \times 0.5 + 20y$$

$$P = 100 + 25 + 20y = 125 + 20y$$

$$P = 125 + 20y = 125 + 20y = 125 + 20y$$

$$\text{optimal } x = \frac{100 + 20y}{20} = \frac{5 + y}{1} = 5 + y$$

fonction d'usage par le site X.

variation de  $f$  et de fonction de demande

$$\begin{cases} \text{Hess } u = \log(x) \\ \text{et } P = 100 + 50x + 20y \end{cases}$$

$$\Delta f_{\text{optimal}} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$x = 100 + 50x + 20y = 100 + 50x + 20y$$

$$100 + 50x + 20y = 100 + 50x + 20y$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} = 0.5}$$

$$P = 100 + 50x + 20y = 100 + 50x + 20y$$

$$P = 100 + 50x + 20y = 100 + 50x + 20y$$

$$\text{optimal } x = \frac{100 + 20y}{20} = \frac{5 + y}{1} = 5 + y$$

fonction de demande du site X.